**Заметки к лекциям**

|  |  |
| --- | --- |
| **Глава 1. Некоторые фундаментальные понятия теории случайных процессов** | |
| [1.1.](#П_1_1) | Определение случайного процесса |
| [1.2.](#П_1_2) | Основные характеристики случайного процесса |
| [1.3.](#П_1_3) | Некоторые примеры случайных процессов |
|  |  |
| **Глава 2. Стационарные случайные процессы** | |
| [2.1.](#параграф_2_1) | Виды стационарности |
| [2.2.](#параграф_2_2) | Характеристики стационарных в широком смысле процессов во временной и частотной областях |
| [2.3.](#параграф_2_3) | Семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса |
| [2.4.](#параграф_2_4) | Модели семивариограмм |  |
| [2.5](#параграф_2_5). | Поведение семивариограммы на бесконечности |  |
| [2.6.](#параграф_2_6) | Поведение семивариограммы в окрестности нуля |  |
| [2.6.](#параграф_3_6) | Семивариограмма и стохастический анализ случайных процессов |  |
| [2.7.](#параграф_3_7) | Спектральное представление внутренне стационарных случайных процессов и их семивариограмм |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ недели /**  **№ лекции** | **Прочитанный материал в 2020г.** | **Прочитанный материал в 2021г.** |
| 1 | До определения 1.11 вариограммы  (приблизительно 5,5 страниц). |  |
| 2 | Первое упражнение оставила на ДЗ.  Закончили на пуассоновских СП.  Занятие начну с проверки ДЗ и со второго упражнения по вариантам.  (приблизительно 6,5 страниц). |  |
| 3 | До теоремы 2.1.  (приблизительно 3,5 страницы). |  |
| 4 | До упражнения перед параграфом 2.2. (лекция длилась 1 час)  (приблизительно 2,5 страницы). |  |
| 5 |  |  |

* Знакомство / список студентов / эл. адрес и телефон старосты.
* Кратко о связи данной дисциплины с общими дисциплинами ВКИАД и ТВ и МС (раздел СП), а также ДС САВР.

При изучении ряда явлений часто приходится иметь дело со случайными величинами, изменяющимися в процессе наблюдения с течением времени. Примерами таких СВ могут служить: загруженность студентов в семестре, длина очереди за билетом в кинотеатр, рейтинг политической партии, колебания напряжения в сети и т.д.

Такие СВ, изменяющиеся в процессе наблюдения, называют *случайными процессами*. Раздел математики, изучающий случайные явления в динамике их развития, называется *теорией случайных процессов.* Теория СП – интенсивно развивающийся раздел ТВ, имеющий многочисленные приложения в физике, технике, биологии, медицине, экономике и других областях знаний.

Любые данные, полученные в результате наблюдения реального физического явления, можно отнести, вообще говоря, к детерминированному или недетерминированному типу. Детерминированные процессы можно описать явными математическими формулами, например, движение спутника по околоземной орбите, изменение температуры воды по мере ее нагревания и т.д. Однако многие другие физические явления порождают процессы, которые нельзя считать детерминированными. Например, спрос и предложение на рынке товаров; процесс изменения во времени пространственных координат частицы, совершающей броуновское движение; изменение высоты волн при морском ветровом волнении; колебания высоты полета самолета около того значения, которое он должен выдерживать. Эти процессы случайны по своей сути, и для их описания требуются вероятностные понятия и статистические характеристики.

Вероятностный процесс – это математическая абстракция реального процесса, течение которого управляется вероятностными законами.

* Об обновлении лекций прошлого семестра.
* Лабораторные задания и схему работы поясню на лабораторных занятиях.
* Мероприятия по текущему контролю знаний:

– Коллоквиум (определение формы проведения)

– Контрольная работа (контрольные срезы на занятиях)

– Лабораторные работы (должны быть все сданы)

* Расчет отметки ТУ (для зачета должны быть все положительные отметки).
* Список литературы и вспомогательные материалы к лабораторным работам размещаются по ссылке, о которой расскажу на лабораторных занятиях.

**Глава 1**

* 1. **Определение случайного процесса**
* Обычно, когда это не приводит к неясности, СП обозначается Y(t, ω) = Y(t).
* Интерпретация параметра t как времени не обязательна. Она возникла исторически, поскольку в большинстве естественнонаучных задач, которые привели к появлению понятия СП, параметр t был временем, а значение Y(t) было тем, что наблюдалось в момент времени t.
* Греческий – латинский алфавит.
* Случайный процесс – СП.
* Классификация с точки зрения СВ => ДСВ, НСВ, многомерные СВ, случайные векторы.
* Классификация с точки зрения t => СП с ДВ, СП с НВ, случайное поле.

Например, СП с *дискретным* *временем* и дискретным множеством состояний – число забитых голов в футбольном матче;

СП с *дискретным* *временем* и непрерывным множеством состояний – измерение температуры воздуха;

СП с *непрерывным* *временем* и непрерывным множеством состояний – давление воздуха в шине колеса автомобиля.

СП с *непрерывным* *временем* и дискретным множеством состояний – число просмотренных телепрограмм от начала работы телевизора до момента t;

* Сечения, траектории. Графическое представление СП (**в том числе в ЛР**).

СП можно трактовать как совокупность сечений или как совокупность траекторий. Чем больше сечений (траекторий) рассматривается, тем подробнее представление о СП мы получим. В пределе число сечений (траекторий) должно (может) быть бесконечным. Изучение системы бесконечного числа СВ – задача трудоемкая; на практике всегда приходится ее упрощать.

В этом случае СП не может быть полностью определенным, т.к. он представим *несчетной* совокупностью своих сечений и невозможно построить совместный закон распределения всех его сечений. Поэтому при решении различных задач, как теоретического, так и прикладного характера, исследователь вынужден ограничиваться использованием конечномерных законов распределения.

* Многомерный СП – пример – погода.
* Поле с дискретным и непрерывным временем. Важность применения теории случайных полей для решения прикладных задач (н-р, геология).
* В дальнейшем, если иное не оговорено, будем исследовать одномерные действительные случайные процессы и предполагать, что для них временные параметры принадлежат параметрическому множеству Т.
* Способы задания случайных процессов:

– аналитический Y**(t,** ω**) = g(t,** η**1(**ω**), …,**η**k(**ω**))**;

– рекуррентный;

– с помощью конечномерных распределений;

– моментами первого и второго порядков.

* Построение ФР СП как ФР ***n***-мерной СВ с ***n***-мерной функцией распределения. Совпадение свойств.
* Совпадение свойств плотности распределения. НиД условия.
  1. **Основные характеристики случайного процесса**
* МО иногда называют *средним значением*. График.
* При каждом t МО процесса есть МО его сечения в точке t работают свойства МО СВ. Если сечение СП Y(t) при данном t представляет собой:

– дискретную СВ, то МО вычисляется через сумму;

– непрерывную СВ с плотностью *р*ξ(*х*; t), то через интеграл.

* Дисперсия указывает на разброс траекторий относительно средней траектории. При каждом t дисперсия процесса есть дисперсия его сечения в точке t работают свойства дисперсии СВ.
* Размерность функции σξ(t) равна размерности СП.
* Графики. МО и дисперсия СП являются весьма важными, но отнюдь не исчерпывающими, так как определяются только одномерным законом распределения. Зная МО и дисперсию ничего нельзя сказать о зависимости двух и более сечений СП. Например, у СП ξ(t) и η(t), изображенных на рисунке 2, примерно одинаковое МО и дисперсии. Однако внутренняя структура этих процессов различна. СП ξ(t) имеет плавно меняющиеся реализации, тогда как СП η(t) имеет резко выраженную колебательную структуру. Для процесса ξ(t) характерна большая предсказуемость реализации, т.е. сильная вероятностная зависимость между двумя его сечениями. Это утверждение не справедливо для СП η(t), который характеризуется неправильными, беспорядочными колебаниями. Между его сечениями практически нет вероятностной зависимости при достаточном удалении сечений.
* (**авто**)ковариационная функция = КФ; (**авто**)корреляционная функция. СП с некоррелированными и ортогональными значениями. При любых t, τ функция R(t, τ) численно равна ковариации сечений процесса в точках t, τ работают свойства ковариации двух СВ.
* Определение взаимной КФ СП X(t), Y(t).
* Определение МО, КФ, корреляционной функции, дисперсии комплексного СП.
* Свойства НКФ. Ее название в пакетах ПП.
* Колмогоров, 1941г. – структурная функция. Круг СП шире. Теорема 1.3. – без доказательства.
* **Спектральные характеристики**. КФ и спектральная плотность содержат одинаковую информацию, но исторически эти два понятия появились и развивались независимо. КФ использовалась в основном математиками и статистиками, тогда как спектральные плотности применялись главным образом в инженерных исследованиях.

Оценим спектральную плотность сверху и получим условие ее существования.

Поскольку КФ симметрична, то при условии конечной дисперсии можно потребовать абсолютной сходимости ряда от 1 до бесконечности.

Сигналы (временные, пространственные), как правило, имеют шумовой или случайный характер. Спектральный анализ – это один из методов обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать частотный состав измеряемого сигнала.

Любой сигнал можно разложить на составляющие. Такое разложение сигнала называется спектральным. Спектр сигнала — это совокупность простых составляющих сигнала с определенными амплитудами, частотами и начальными фазами.

Преобразование Фурье является математической основой, которая связывает сигнал с его представлением в частотной области.

* В дополнение к известным характеристикам высших порядков во временной области СП (моментам, кумулянтам) можно вести характеристики на основе семивариограммы.
  1. **Некоторые примеры случайных процессов**
* Характеристики комплексных СП;
* Из некоррелированности не следует независимость;
* Вместо 4 можно взять 3 точки.
* Определение скалярного произведения.
* Свойство для центрированного СП.
* Если Y(t)имеетнекоррелированные приращения, то процесс Y**1(t) =** Y**(t) – *E*{**Y**(t)}** является процессом как с некоррелированными, так и с ортогональными приращениями.
* Свойства СП с независимыми приращениями:

– СП с независимыми приращениями является процессом с некоррелированными приращениями;

– Гауссовский СП с некоррелированными приращениями является процессом с независимыми приращениями;

– Всякий процесс с независимыми приращениями является марковским процессом.

* Для удобства часто полагают t0=0, Y(t0) = 0. Т.о., зная распределения Y(t0) и Y(t) – Yξ(s), t > s, мы можем восстановить все конечномерные распределения процесса.
* СП с независимыми приращениями – естественное обобщение случайных последовательностей, являющихся суммами независимых СВ.
* Два определения ГСП. Свойства.
* Совместное распределение сечений **{ξ(t1), …, ξ(t*k*)}** имеет плотность ⇔ когда матрица *R*ξ = { Rξ(t*l* , t*j*) }невырожденная. Есл det *R*ξ = 0 то сечения линейно зависимы, а их совместное распределение плотности не имеет.
* Семейство конечномерных распределений гауссовского СП полностью определяется двумя моментными характеристиками: **МО** и **КФ**
* Семиинварианты порядка р, p > 2, гаусcовского СП равны нулю.
* Теорема Колмогорова.
* Известно [Ширяев, Булинский], что если имеются произвольная действительная функция m = m(t) и симметричная неотрицательно определенная действительная функция R(t, s) то найдутся вероятностное пространство и заданная на нем гауссовская случайная функция Y(t), такие, что M{Y(t)} = m(t) и cov{Y(t), Y(s)} = R(t, s).
* Условия, налагаемые на R(t, s) в у являются не только достаточными, но и необходимыми для существования действительного ГСП с КФ R(t, s). Класс неотрицательно определенных действительных функций совпадает с классом КФ действительных ГСП.
* ГСП для комплексного случая.
* Родоначальник и область применения ВСП. Стандартный ВСП. Свойства ВСП и вид КФ. Броуновский мост **w0(t) = ω(t) – tω(1), t∈[0, 1]**.

СП служит в каком-то приближении моделью движения частицы под действием хаотических ударов молекул.

**Ро́берт Бро́ун** — *британский ботаник* – первооткрыватель «[броуновского движения](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%80%D0%BE%D1%83%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B2%D0%B8%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5)» в 1826г. В настоящее время широко используется в анализе финансового рынка.

СП получил также название винеровского процесса по имени *американского* *ученого* Н. Винера (**Но́рберт Ви́нер**), внесшего значительный вклад в его теорию.  Буква **ω** в обозначении процесса по имени Винера (*Wiener* ) .

Обычно в определение ВП включают еще требование непрерывности п.н. его траекторий. Однако это свойство всегда можно считать выполнимым.

* Примеры процесса Пуассона. Траектории и свойства. Потоки событий.

Считается, что пуассоновское распределение с нулевым параметром λ имеет СВ, тождественно равная нулю.

Из определения ПП следует, что траектории процесса являются монотонно неубывающими функциями, кусочно-постоянными с целочисленными приращениями.

Процесс Пуассона играет важную роль в различных приложениях СП, в частности, в ТМО. Например, он является хорошей математической моделью для числа вызовов, поступивших на телефонную станцию к моменту t (эта функция возрастает скачками величины 1, и ее приращения – числа вызовов на неперекрывающихся промежутках времени – можно считать независимыми, пренебрегая малыми эффектами, вызываемыми повторными вызовами при отказе).

Процессом Пуассона так же является: число ошибок в тексте, набираемом на компьютере; число клиентов, обслуживающихся у одного мастера парикмахерской; число запросов, поступающих одному оператору справочного бюро; число клиентов одной кассы кинотеатра (*вопрос студентам: число проданных билетов?*); число выходов из строя некоторого устройства к моменту t; число запросов, поступающих на сервер компьютерной сети к моменту t.

Не является: число абонентов (переговорщиков), завершивших разговор. Эта функция возрастает скачками величины 1 и более.

*Вопрос студентам: число студентов, входящих с опозданием на лекцию?*

Для некоторых приложений оказывается удобным изменить терминологию и говорить о каждом скачке выборочной функции, как о событии. Тогда свойство 2 показывает, что МО числа событий в интервале длины t равно λt. Константа λ является интенсивностью (средней плотностью) числа появления событий.

* Особенность СП Коши – отсутствие конечных моментов 1 и 2 порядков.
* *Упражнение* можно сделать по вариантам.

**Глава 2**

**2.1. Виды стационарности**

* Примеры. Свойства стационарного в узком смысле СП. МО и КФ. Однородность.

Свойство стационарности означает неизменность некоторых характеристик сечений процесса во времени. Конечно, для реальных процессов это условие весьма ограничительно, однако оно выполняется довольно часто, если рассматривать процесс на достаточно коротком интервале времени, в течение которого вероятностные характеристики процесса изменяются мало.

В качестве примеров стационарных СП можно предложить следующие:

* Движение с постоянной скоростью авто (но не при торможении);
* колебания напряжения, подаваемого в качестве силового питания ЭВМ;
* колебания самолета при «автополете»;
* давление газа в газопроводе.

Заметим, что термин «стационарность» возник при изучении случайных функций времени и характеризует постоянство их свойств во времени. Для случайных процессов, аргументом которых является другая переменная, например расстояние, вводится термин «однородность». Обычно термин «однородность» применяют к случайным полям, характеризуя их однородность в пространстве.

* Свойства стационарного в широком смысле СП. Основная характеристика – КФ. Связь со стационарными в узком смысле СП. Эквивалентность для ГСП.

Определение стационарности в узком смысле налагает слишком много ограничительных условий на случайные процессы, и на практике их невозможно даже проверить.

* Если СП стационарный в узком смысле и для него существует конечный второй момент, то СП является и стационарным в широком смысле, но не наоборот.
* Для действительного гауссовского СП понятия стационарности в широком и узком смыслах эквивалентны.
* Зарождение геостатистики. Вариограмма – инструмент.

См. отдельный файл.

* Внутренне стационарные СП.

В том случае, когда СП представляет собой нестационарный СП по МО (т.е. МО меняется с течением времени), можно рассматривать приращение процесса Xτ(t) = x(t+τ) - x(t). При небольших значениях τ медленные изменения процесса x(t) будут мало сказываться на значениях Xτ(t), и тем меньше, чем они медленнее. В результате подавления компонент с очень большими периодами можно считать, что приращение Xτ(t) стационарно.

* *Вариограмму часто предпочитают КФ*, поскольку ее можно рассчитать прямо из данных, без необходимости рассчитывать среднее.
* *Упражнение* по вариантам: процесс Пуассона –1 вариант; процесс БрДв – 2 вариант.
* Доказать, что если СП является стационарным в широком смысле, то он будет и внутренне стационарным будет также доказано (2.3).
* Подробная характеристика рис. 2.1 – рассмотреть все функции.
* В основе вариограммы лежит приращение ⇒ надо определить все моменты первых двух порядков. Теоремы + доказательства.
* *Упражнение*: сначала вычислить М, D; параметры (аргументы) cov показать, только потом сверить ответ.
* Разные виды сходимости ⇒ разные виды непрерывности. Определение непрерывности в СК смысле. Теоремы с доказательствами. Лев Яглом.
* *Упражнение* сделать самостоятельно и сдать (моменты времени для вычисления ковариации назвать, т.к. я их обновила).

**2.2. Характеристики стационарных в широком смысле процессов во временной и частотной областях**

* КФ делятся на колебательные (периодические и затухающие) и монотонные (треугольные и асимптотически…). Типовые графики. Свойства.
* Практическая необходимость определения интервалов корреляции. Оценки КФ. Эргодичность. ДИ на графиках АКФ в некоторых ППП.
* Способы определения интервалов корреляции (в том числе через нормированную КФ). Практическая значимость знания ИК для различных моделей прогнозирования. Пример из геологии. Таблица интервалов корреляции приведена в Прохоров «Математическое описание и моделирование СП», 2001г.

Чем медленнее по мере увеличения значений t убывает функция Rξ(t), тем больше эффективный интервал корреляции случайного процесса, **и тем медленнее изменяются во времени его реализации**.

Время корреляции (ВК) без модуля (под интегралом НКФ) – применяется при анализе СП с монотонными КФ.

ВК с модулем (под интегралом модуль НКФ): знак модуля в определении введен для случая, когда КФ может принимать отрицательные значения. Однако для колебательных КФ оценка затруднена.

ВК с квадратом КФ (под интегралом НКФ в квадрате) – подходит для колебательных КФ. Несмотря на то, что дает заниженные результаты, широко применяется.

* Оценим спектральную плотность сверху и получим условие ее существования. Поскольку КФ симметрична, то при условии конечной дисперсии можно потребовать абсолютной сходимости ряда от 1 до бесконечности.
* Условия существования спектральной плотности для внутренне ССП не выполняются.
* Спектральная плотность является *прямым преобразованием Фурье* от КФ.

Можно встретить название «**спектральная плотность СП в комплексной форме**» или «**двусторонний спектр**».

Спектральная плотность иногда называется - **спектральная плотность мощности**. Спектральная плотность описывает, как мощность СП распределена по частоте.

Мощность равна энергии, отнесенной к единице времени. Это характеристика интенсивности сигнала.

Спектральная функция имеет «физический смысл» функции распределения, описывающей распределение энергии стационарного СП по разным частотам.

В приложениях параметр λ имеет смысл **круговой частоты гармонического колебания** (λ=2πf, f - частота гармонического колебания, т.е. количество периодов колебания, укладывающихся в единицу времени).

* Вместо ***f*ξ(λ), λ**R, часто на практике удобнее рассматривать спектральную плотность *f*0(λ) = 2*f*ξ(λ), λ∈[0, ∞); и *f*0(λ) = 0, иначе. *f*0(λ) – спектральная плотность процесса в **действительной форме** (или **односторонний спектр**).
* Свойство *f*(λ) ≥ 0 является необходимым и достаточным условием неотрицательной определенности КФ. Имеет место, т.к. ***f*ξ(λ) = *dF*ξ(λ)/*d*λ**, а по определению спектральная функция монотонно не убывает.
* *f*(λ) = *f*(–λ) следует из определения спектральной плотности.
* Из приведенных теорем следует, что КФ м.б. однозначно восстановлена по спектральной плотности ОПФ.

Спектральная плотность ССП не содержит дополнительной информации по сравнению с КФ. Однако обе функции дают информацию различного типа, причем для решения той или иной задачи получение информации одного типа может быть более желательно.

Статистические оценки спектральной плотности проигрывают по свойствам и простоте оценкам КФ.

* Таким образом был найден период солнечной активности T\* = 11, 2 года.
* Ширина спектра сигнала. Выписываем определение КФ и вычисляем ее в нуле.
* Неравенство неопределенности.

Установим связь между эффективной шириной спектра и интервалом корреляции. Выпишем определение спектральной плотности. Вычислим ее в нуле и оценим по модулю. Получим неравенство неопределенности.

Если КФ ≥0, то неравенство неопределенности принимает вид равенства.

* Из неравенства неопределенности следует, что t0 →0 ⇔ L→∞.

L→∞ означает, что спектр СП содержит бесконечно много гармоник (процесс становится сложнее).

Понятие L позволяет разбить СП на два класса: узкополосные и широкополосные. *Узкополосным* СП называется СП, основная мощность которого сосредоточена вблизи какой-либо частоты λ0. Условие узкополосности записывается L/2 << λ0 . Процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются *широкополосными*. К узкополосным процессам относятся процессы, имеющие колебательную КФ с показателем колебательности μ > 5. К широкополосным процессам относятся модели с μ < 5.

* Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты λэ, а не в нуле, то выражение для оценки ширины спектра примет вид: L’ = λэ +L/2.
* Упражнение. БШ – широкополосный процесс.
* Краткая характеристика ЛР 2 (отчет, титульный лист, *разные по вариантам КФ*,графики, вычисления, краткие выводы).

**2.3. Семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса**

1. Рассмотрим СП с конечным вторым моментом. Доказать теорему 2.10.
2. Два упражнения выполняется у доски – *вызвать пассивных студентов*, *кто ранее не отвечал у доски.*

**2.4.Модели семивариограмм**

* Модели удовлетворяют свойству условной отрицательной определенности.

Они бывают двух типов:

* модели, достигающие предельного значения – *порога*,
* модели, растущие неограниченно.

Модели первого типа используются, если случайный процесс обладает стационарностью в широком смысле. Предельное значение, которое они достигают, – это порог, а расстояние, на котором достигается порог, – ранг. Некоторые из моделей достигают ранг асимптотически. Для них ранг – это расстояние, при котором модель достигает 95% от порога.

Модели второго типа не достигают порога, а непрерывно растут с увеличением расстояния.

Так как семивариограмма является четной функцией, то будем рассматривать модели для

* Модель наггет.

Константа *c*0 = *R*(0) носит название *наггет* (nugget), что означает самородок. Это понятие было заимствовано из золотодобычи и означает некоррелированный случайный характер. Наличие у данных вариограммы только типа наггет означает отсутствие пространственной корреляции. Данные в этом случае распределены абсолютно случайно. Отсутствие корреляции в данных может иметь следующие причины: мелкомасштабная вариабельность (меньше, чем расстояние между измерениями), ошибки измерений, ошибки в определении местоположений точек.

* Сферическая модель

Радиус корреляции – время корреляции.

* Экспоненциальная модель

Касательная из начала координат достигает порога на расстоянии около ранга.

* Гауссова модель

График модели имеет точку перегиба.

Отличительной чертой этой модели является ее гладкость: параболическое поведение вблизи нуля и асимптотическое приближение к плато.

* Степенная модель.

Модель отражает корреляцию на всех расстояниях, поэтому для нее радиус корреляции стремится к бесконечности. В этом случае не выполняется предположение о стационарности второго порядка.

* Периодическая модель – используется для периодических структур.
* Затухающая периодическая модель – представляет собой произведение экспоненциальной модели ковариации и периодической функции. Встречается чаще, чем чисто периодическая.
  1. **Поведение семивариограммы на бесконечности**
* В доказательстве теоремы 2.15 используется правило Лапиталя. Дважды берется производная по *п* .
* Еще один критерий для семивариограммы.
  1. **Поведение семивариограммы в окрестности нуля**